

Semestr IV

Temat: Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OY i OX.

Materiał do tych zajęć będzie w załącznikach.

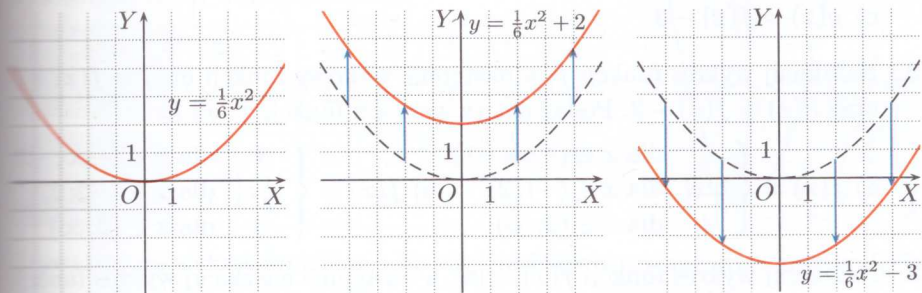
Odpowiedzi do zadań i ćwiczeń są z boku zdjęć.

Powodzenia i wytrwałości życzę.

4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY

Przykład 1

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji: $y = \frac{1}{6}x^2$, $y = \frac{1}{6}x^2 + 2$ oraz $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$.



Wykresy funkcji: $y = \frac{1}{6}x^2 + 2$ i $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$ można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{1}{6}x^2$ wzdłuż osi OY o odpowiednią liczbę jednostek.

Twierdzenie

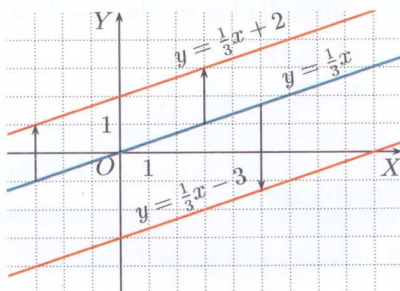
Wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w górę** wzdłuż osi OY.

Wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w dół** wzdłuż osi OY.

Przykład 2

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 2 jednostki w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 3 jednostki w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x - 3$.



Ćwiczenie 1

Stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji $y = |x|$, naszkicuj wykres i podaj zbiór wartości funkcji:

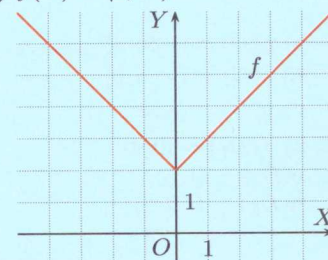
- a) $y = |x| + 2$, b) $y = |x| - 2$, c) $y = |x| - 3$, d) $y = |x| + \frac{1}{2}$.

Uczeń:

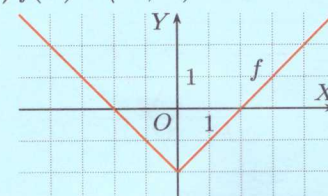
- rysuje wykresy funkcji: $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ oraz $y = f(x) - q$ dla $q > 0$.

Ćwiczenie 1

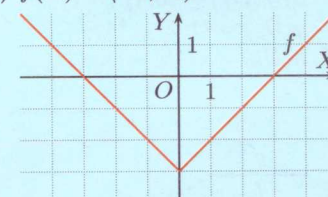
- a) $f(D) = \langle 2; \infty \rangle$



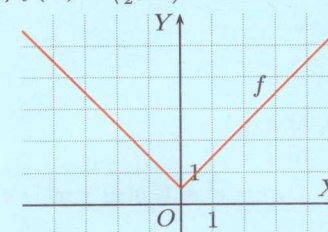
- b) $f(D) = \langle -2; \infty \rangle$



- c) $f(D) = \langle -3; \infty \rangle$



- d) $f(D) = \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$



Multiteka

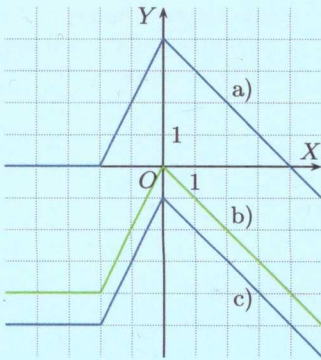
- Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OY

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.7

G Generator
testów i sprawdzianów

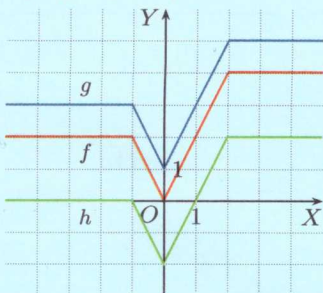
Odpowiedzi do zadań

1.

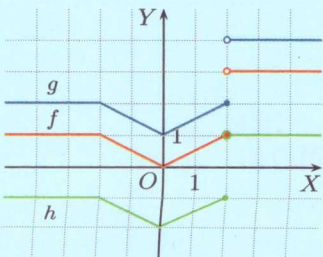


- a) $g(D) = (-\infty; 4)$
- b) $g(D) = (-\infty; 0)$
- c) $g(D) = (-\infty; -1)$

2. a) $f(D_f) = (0; 4)$,
 $g(D_g) = (1; 5)$,
 $h(D_h) = (-2; 2)$



- b) $f(D_f) = (0; 1) \cup \{3\}$,
 $g(D_g) = (1; 2) \cup \{4\}$,
 $h(D_h) = (-2; -1) \cup \{1\}$

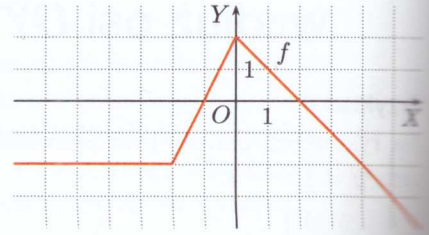


- 3. a) $a = 1$
- b) $a = -4$
- 4. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^2 - 4$

Zadania

1. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.
 Naszczuj wykres funkcji g i podaj jej zbiór wartości.

- a) $g(x) = f(x) + 2$
- b) $g(x) = f(x) - 2$
- c) $g(x) = f(x) - 3$



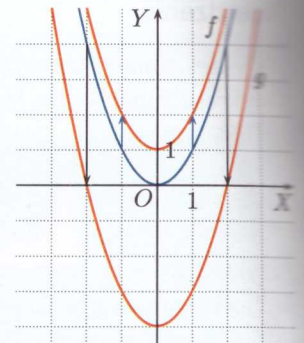
2. Naszczuj wykres funkcji f , a następnie wykresy funkcji $g(x) = f(x) + 1$ oraz $h(x) = f(x) - 2$. Podaj zbiory wartości funkcji f , g i h .

- a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |2x| & \text{dla } x \in (-1; 2) \\ 4 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$
- b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |\frac{1}{2}x| & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 3 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$

3. Naszczuj wykres funkcji $f(x) = |x|$, a następnie naszczuj wykres funkcji $g(x) = |x| + a$ oraz podaj wartość parametru a , jeśli:

- a) zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(1; \infty)$,
- b) miejscami zerowymi funkcji g są liczby -4 i 4 .

4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = x^2$ (kolor niebieski) oraz wykresy funkcji f i g (kolor czerwony). Podaj wzory funkcji f i g .



5. Naszczuj wykres funkcji $y = x^2$, a następnie wykres funkcji f . Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ dla $m \in \{-3, -1, 2\}$.

- a) $f(x) = x^2 + 2$
- b) $f(x) = x^2 - 1$
- c) $f(x) = x^2 - 3$
- d) $f(x) = x^2 - 9$

Powtórzenie

6. Naszczuj wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x$, a następnie wykres funkcji:
- a) $y = \frac{1}{2}x + 5$, b) $y = \frac{1}{2}x - 4$, c) $y = \frac{1}{2}x - 6$, d) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

7. Naszczuj wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{2}|x|$, a następnie wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości funkcji f .

- a) $f(x) = \frac{1}{2}|x| + 3$
- b) $f(x) = \frac{1}{2}|x| - 1$
- c) $f(x) = \frac{1}{2}|x| - 3$

- 5. a) 0 dla $m \in \{-3, -1\}$, 1 dla $m = 2$
- b) 0 dla $m = -3$, 1 dla $m = -1$, 2 dla $m = 2$
- c) 1 dla $m = -3$, 2 dla $m \in \{-1, 2\}$
- d) 2 dla $m \in \{-3, -1, 2\}$

- 7. a) $f(D) = (3; \infty)$
- b) $f(D) = (-1; \infty)$
- c) $f(D) = (-3; \infty)$

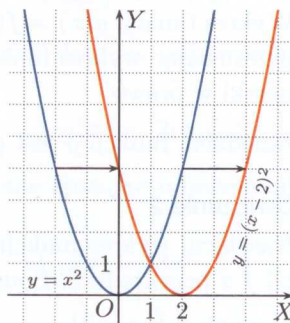
4.8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX

Przykład 1

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x - 2)^2$ naszkicowane na podstawie odpowiednich tabel wartości funkcji.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (x - 2)^2$	9	4	1	0	1	4	9

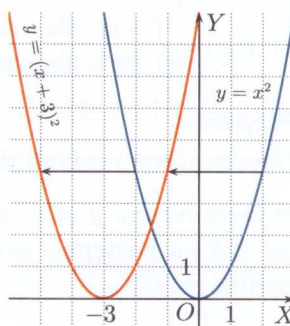


Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x - 2)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX.

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x + 3)^2$ naszkicowane na podstawie odpowiednich tabel wartości funkcji.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$y = (x + 3)^2$	9	4	1	0	1	4	9



Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x + 3)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi OX.

Twierdzenie

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w prawo** wzdłuż osi OX.

Wykres funkcji $y = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w lewo** wzdłuż osi OX.

Ćwiczenie 1

Naszkiuj wykres funkcji g , stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = |x|$. Podaj miejsce zerowe funkcji g .

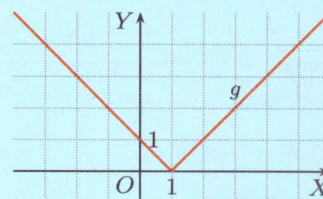
- a) $g(x) = |x - 1|$ b) $g(x) = |x + 2|$ c) $g(x) = |x + 3|$ d) $g(x) = |x - 4|$

Uczeń:

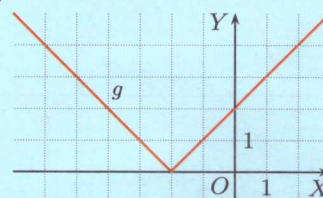
- rysuje wykresy funkcji:
 - $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ oraz
 - $y = f(x + p)$ dla $p > 0$.

Ćwiczenie 1

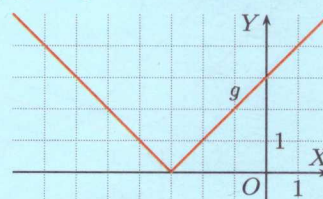
- a) $x = 1$



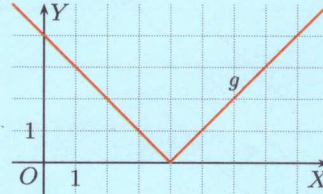
- b) $x = -2$



- c) $x = -3$



- d) $x = 4$



Multiteka

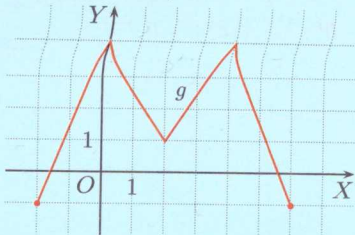
- Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OX

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 4.8

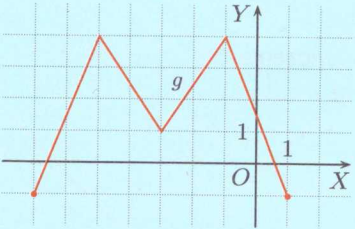
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

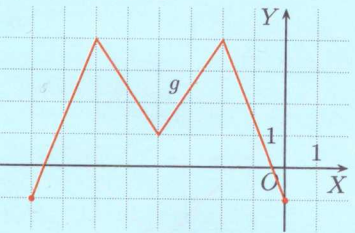
a) $D = \langle -2; 6 \rangle$



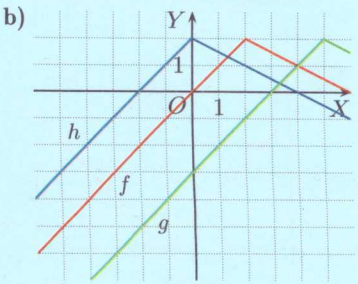
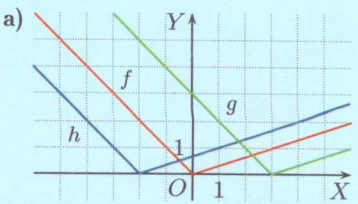
b) $D = \langle -7; 1 \rangle$



c) $D = \langle -8; 0 \rangle$

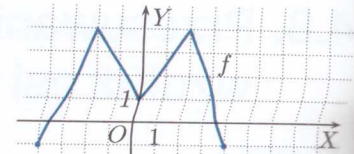


Ćwiczenie 3

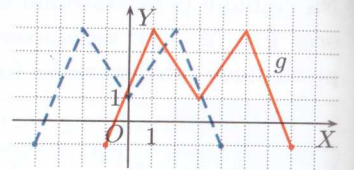


Przykład 3

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x - 3)$ i podaj jej dziedzinę.



Wykres funkcji $g(x) = f(x - 3)$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y = f(x)$ o 3 jednostki w prawo.



Dziedziną funkcji g jest przedział $\langle -1; 7 \rangle$.

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji g , stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji f z przykładu 3. Podaj dziedzinę funkcji g .

a) $g(x) = f(x - 2)$

b) $g(x) = f(x + 3)$

c) $g(x) = f(x + 4)$

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x - 3)$ i $h(x) = f(x + 2)$.

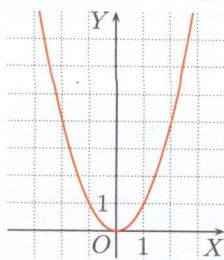
a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 3 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

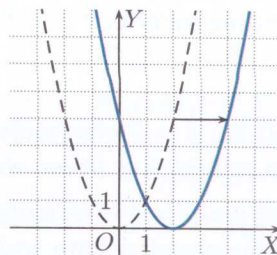
Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $y = (x - 2)^2 + 3$.

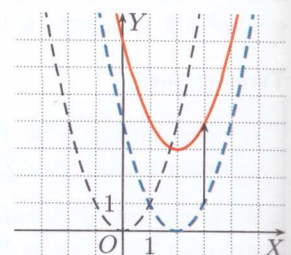
Wykres funkcji $y = x^2$ przesuwamy najpierw o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX , a następnie otrzymany wykres przesuwamy o 3 jednostki w górę wzdłuż osi OY .



Wykres funkcji $y = x^2$



Wykres funkcji $y = (x - 2)^2$



Wykres funkcji $y = (x - 2)^2 + 3$

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = (x - 2)^2 - 1$

b) $f(x) = (x + 3)^2 - 2$

c) $f(x) = (x + 1)^2 + 1$

Ćwiczenie 4

