

Matematyka kl. VII

Temat: Wyłączanie liczby przed pierwiastek

Pierwiastki można przedstawiać w innej postaci, a mianowicie **wyłączając czynnik przed znak pierwiastka**.

Przykłady

$$\sqrt{12} = \\ = \sqrt{4 \cdot 3} =$$

$$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} =$$

$$= 2\sqrt{3}$$

↑

Czynnik wyłączony przed pierwiastek (liczbę **2** nazywamy czynnikiem, bo wyrażenie $2 \cdot \sqrt{3}$ jest iloczynem, a liczby w mnożeniu nazywamy czynnikami).

$$\sqrt{20} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot 5} =$$

$$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} =$$

$$= 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{16} =$$

$$= \sqrt[3]{8 \cdot 2} =$$

$$= \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} =$$

$$= 2\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{88} = \sqrt[3]{8 \cdot 11} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{11} = 2\sqrt[3]{11}$$

$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{64 \cdot 2} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$$

Liczbę 12 zapisujemy w postaci iloczynu (mnożenia) takich dwóch liczb, aby z jednej z nich można było wyciągnąć pierwiastek (aby była kwadratem liczby naturalnej).

$$\sqrt{4} = 2$$

Liczbę 20 zapisujemy w postaci iloczynu takich dwóch liczb, aby z jednej z nich można było wyciągnąć pierwiastek.

$$\text{Stosuję wzór: } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Liczbę 16 zapisujemy w postaci iloczynu takich dwóch liczb, by z jednej z nich można było wyciągnąć pierwiastek sześcienny (aby jedna z nich była sześcianem liczby naturalnej).

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ bo } 2^3 = 8$$

Można też **włączać czynnik pod znak pierwiastka**.

Temat 2: Włączanie liczby pod pierwiastek.

$$3\sqrt{5} =$$

$$= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} =$$

$$= \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$$

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12}$$

$$5\sqrt{3} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{75}$$

$$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{40}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \cdot \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{\frac{1}{8^2} \cdot 12^3} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{1\frac{1}{2}}$$

Liczbę 3 włączamy pod pierwiastek, zauważ, że $3 = \sqrt{3^2}$.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Zadanie 1

Oblicz:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} =$

$$= \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$$

b) $\sqrt{200} : \sqrt{2} =$

$$= \sqrt{200 : 2} = \sqrt{100} = 10$$

c) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3} =$

$$= \sqrt[3]{24 : 3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

d) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{128} : \sqrt{2} =$

$$= \sqrt{20 \cdot 5} - \sqrt{128 : 2} = \sqrt{100} - \sqrt{64} =$$

$$= 10 - 8 = 2$$

e) $\sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3} + \sqrt{27} \cdot \sqrt{3} =$

$$= \sqrt[3]{81 : 3} + \sqrt{27 \cdot 3} =$$

$$= \sqrt[3]{27} + \sqrt{81} = 3 + 9 = 12$$

Ważne!

Pierwiastki można mnożyć i dzielić, jeżeli są tego samego stopnia.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$$

$$\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a : b}$$

uwaga na stopień pierwiastków

Zadanie 2

Oblicz:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} &= \\ &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} &= \\ &= 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \\ &= 1\sqrt{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} &= \\ &= -1\sqrt{3} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 4\sqrt{3} &= \\ &= 7\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } 3\sqrt{5} - \sqrt{5} &= \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } 5\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} &= \\ &= 11\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = \\ &= 10\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} &= \\ &= 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = \\ &= -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } 4\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{7} &= \\ &= 9\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = \\ &= 7\sqrt{7} \end{aligned}$$

Ważne!

Pierwiastki, które mają ten sam stopień i tę samą liczbę podpierwiastkową, można dodawać i odejmować.

Takie pierwiastki nazywamy podobnymi.

Wykonujemy działania na liczbach stojących przed pierwiastkami, tzn. $2 + 4 = 6$ (pierwiastek przepisujemy).

$$2 + 3 = 5$$

$$5 - 4 = 1$$

$$2 - 3 = -1$$

$$2 + 1 + 4 = 7 \quad (\sqrt{3} = 1\sqrt{3})$$

$$3 - 1 = 2 \quad (\sqrt{5} = 1\sqrt{5})$$

$$5 + 6 = 11$$

$$11 - 1 = 10$$

$$1 + 2 = 3 \quad (\sqrt{3} = 1\sqrt{3})$$

$$3 - 5 = 3 + (-5) = -2$$

$$4 + 5 = 9$$

$$9 - 2 = 7$$

Zadanie 3

Oblicz:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{32} + \sqrt{2} &= \\ &= \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{2} = \\ &= \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} = \\ &= 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Tych pierwiastków nie można dodać, bo liczby podpierwiastkowe są różne. Spróbujmy przekształcić je, wyłączając czynnik przed znak pierwiastka.

otrzymaliśmy pierwiastki podobne, teraz można je dodać
(4 + 1 = 5).

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{50} - \sqrt{8} + \sqrt{18} &= \\ &= \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} = \\ &= 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \\ &= 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \\ &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

Tych pierwiastków nie da się dodawać ani odejmować. Spróbujmy wyłączyć czynnik przed znak pierwiastka, może otrzymamy pierwiastki podobne.

Teraz można odejmować i dodawać.

$$\begin{aligned} \text{c) } \sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{48} &= \\ &= \sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{16 \cdot 3} = \\ &= 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \\ &= 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \\ &= 1\sqrt{3} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Wyłączamy czynnik przed znak $\sqrt{\quad}$.

Teraz dodajemy (3 + 2 = 5)

i odejmujemy (5 - 4 = 1).

Zadanie 4

Oblicz:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{2}(\sqrt{8} + \sqrt{2}) &= \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \\ &= \sqrt{2 \cdot 8} + \sqrt{2 \cdot 2} = \\ &= \sqrt{16} + \sqrt{4} = 4 + 2 = 6 \end{aligned}$$

Każdą liczbę z nawiasu mnożę przez $\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{3}(4\sqrt{12} - \sqrt{3}) &= \\ &= \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{12} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \\ &= 4\sqrt{3 \cdot 12} - (\sqrt{3})^2 = \\ &= 4\sqrt{36} - 3 = 4 \cdot 6 - 3 = 24 - 3 = 21 \end{aligned}$$

Nawias mnożę przez $\sqrt{3}$.

$$\text{c) } 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{6} = 3 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = 6\sqrt{5 \cdot 6} = 6\sqrt{30}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (7\sqrt{2} - 3\sqrt{8} + 3\sqrt{18}) \cdot \sqrt{2} &= \\ &= 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 3\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} + 3\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \\ &= 7\sqrt{2 \cdot 2} - 3\sqrt{8 \cdot 2} + 3\sqrt{18 \cdot 2} = \\ &= 7\sqrt{4} - 3\sqrt{16} + 3\sqrt{36} = \\ &= 7 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = \\ &= 14 - 12 + 18 = 20 \end{aligned}$$

Każdą liczbę z nawiasu mnożę przez $\sqrt{2}$.

Wyciągam pierwiastki.

$$\begin{aligned} \text{e) } 3\sqrt{2}(4\sqrt{8} + 5\sqrt{18}) &= \\ &= 3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{8} + 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{18} = \\ &= 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} + 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \\ &= 12\sqrt{2 \cdot 8} + 15\sqrt{2 \cdot 18} = \\ &= 12\sqrt{16} + 15\sqrt{36} = \\ &= 12 \cdot 4 + 15 \cdot 6 = 48 + 90 = 138 \end{aligned}$$

Wykonuję podobnie jak poprzednie przykłady.