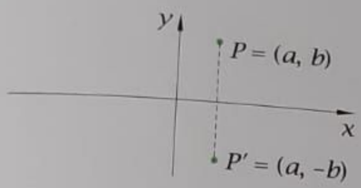
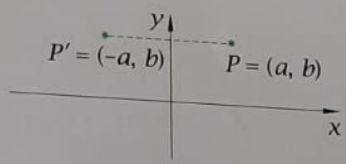
SYMETRIE W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

Niektóre przekształcenia geometryczne łatwo opisać w układzie współrzędnych. W prosty sposób możemy na przykład ustalić współrzędne punktu symetrycznego do danego punktu względem osi układu współrzędnych.



Dwa punkty są do siebie symetryczne względem osi x, gdy ich pierwsze współrzędne są jednakowe, a drugie współrzędne są liczbami przeciwnymi.

Dwa punkty są symetryczne do siebie względem osi y, gdy ich pierwsze współrzędne są liczbami przeciwnymi, a drugie współrzędne są jednakowe.



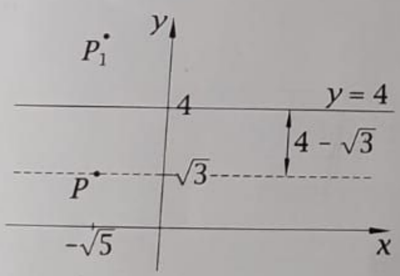
A Podaj przykłady dwóch punktów symetrycznych do siebie:

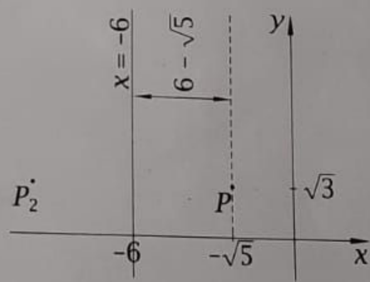
1. względem prostej $x = -11$,

2. względem prostej $y = 51$.

Gdy prosta k jest równoległa do jednej z osi układu współrzędnych, to dla dowolnego punktu P nietrudno ustalić współrzędne punktu do niego symetrycznego względem prostej k.

P Punkt P_1 jest symetryczny do punktu $P = (-\sqrt{5}, \sqrt{3})$ względem prostej $y = 4$, a punkt P_2 jest symetryczny do punktu P względem prostej $x = -6$. Znajdź współrzędne punktów P_1 i P_2.





$P_1 = (x_1, y_1)$

$x_1 = -\sqrt{5}$

$y_1 = 4 + (4 - \sqrt{3}) = 8 - \sqrt{3}$

$P_1 = (-\sqrt{5}, 8 - \sqrt{3})$

$P_2 = (x_2, y_2)$

$x_2 = -6 - (6 - \sqrt{5}) = -12 + \sqrt{5}$

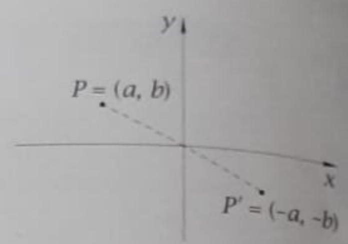
$y_2 = \sqrt{3}$

$P_2 = (-12 + \sqrt{5}, \sqrt{3})$

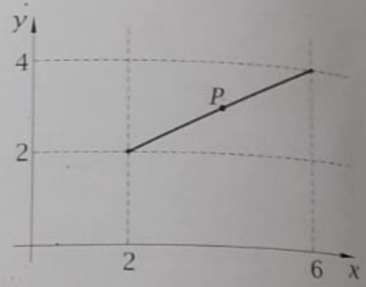
Uwaga. W układzie współrzędnych można również wyznaczyć współrzędne punktu symetrycznego do danego względem dowolnie położonej prostej, ale na ogół jest to dość skomplikowane.

Na rysunku obok zilustrowano symetrię środkową względem punktu $(0, 0)$.

Dwa punkty są symetryczne do siebie względem początku układu współrzędnych, gdy odpowiednie współrzędne tych punktów są liczbami przeciwnymi.



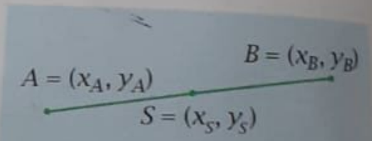
B Zaznaczony na rysunku punkt P to środek narysowanego odcinka. Jakie współrzędne ma punkt P?



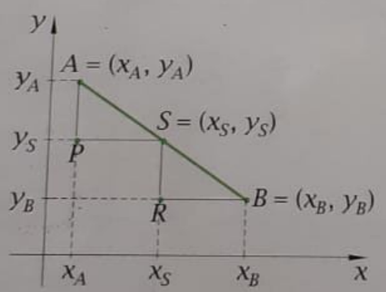
Pokażemy teraz, jak znaleźć współrzędne punktu symetrycznego do danego względem dowolnego punktu A. Przypomnijmy, że dwa punkty są symetryczne do siebie względem punktu S, gdy punkt S jest środkiem odcinka, którego końcami są te punkty.

Zatem do znajdowania obrazów punktów w symetrii środkowej może posłużyć następująca własność:

Współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych jego końców.



$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$



Uzasadnienie tej własności można odczytać z rysunku obok. Punkt S jest środkiem odcinka AB, więc trójkąty SAP oraz BSR są przystające. Z równości $|PS| = |RB|$ oraz $|SR| = |AP|$ wynika, że:

$$x_S - x_A = x_B - x_S \qquad y_S - y_B = y_A - y_S$$

Stąd: $$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

P Znajdź współrzędne punktu, który jest obrazem punktu $P = (3, -11)$ w symetrii o środku $A = (-9, 7)$.

$P = (3, -11)$ $\quad A = (-9, 7)$ $\quad P' = (x, y)$

$P' = S_A(P)$

$-9 = \frac{3 + x}{2}$ i $7 = \frac{-11 + y}{2}$

Zapisujemy równości wynikające z tego, że punkt A jest środkiem odcinka PP'.

$x = -21$ $\qquad y = 25$

$P' = (-21, 25)$

ZADANIA

1. Znajdź obrazy punktów $A=(-2,5)$, $B=(\sqrt{2},1-\sqrt{3})$, $C=(\sqrt{5}-4,0)$ w symetrii osiowej względem osi x oraz w symetrii względem osi y.

2. Znajdź obraz punktu A w symetrii osiowej względem podanej prostej.

a) $A=(8,-5)$, prosta $y=-4$

b) $A=(-3,4)$, prosta $x=-2$

c) $A=(0,1)$, prosta $y=3\sqrt{2}$

d) $A=(-5-\sqrt{7},9)$, prosta $x=\sqrt{7}$

3. Punkty A i A' są symetryczne do siebie względem pewnej prostej równoległej do jednej z osi układu współrzędnych. Jaka to prosta?

a) $A=(3,5)$ $A'=(3,-21)$

b) $A=(-10,\sqrt{2})$ $A'=(10\sqrt{2},\sqrt{2})$

c) $A=(a,b)$ $A'=(a+5,b)$

d) $A=(a,b)$ $A'=(a,3b+4a)$

4. Punkt R jest obrazem punktu $P=(-1,7)$ w symetrii względem osi y. Punkt S jest symetryczny do punktu R względem prostej $y=-3$. Jakie współrzędne ma punkt symetryczny do punktu S względem osi x?

5. Znajdź współrzędne środka odcinka, którego końcami są punkty:

a) $A=(7,3)$, $B=(-3,5)$

b) $A=(-2,-12)$, $B=(0,-6)$

6. Podaj współrzędne punktów, które są obrazami punktów $A=(-10,2)$ i $B=(0,1)$ w symetrii środkowej względem punktu:

a) $S=(0,0)$ **b)** $S=(0,2)$ **c)** $S=(1,0)$ **d)** $S=(\sqrt{7},2\sqrt{7})$

7. Znajdź środek symetrii, w której punkt A' jest obrazem punktu A.

a) $A=(-2,5)$ $A'=(-4,-3)$

b) $A=(a,b)$ $A'=(5a,b-4)$

8. Punkt S jest symetryczny do punktu $P=(-3,11)$ względem punktu $A=(1,-2)$. Jakie współrzędne ma punkt symetryczny do punktu S względem prostej $y=4$?

9. a) Punkty $A=(-2,5)$ i $B=(-4,-3)$ są sąsiednimi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a punkt $S=(2,-1)$ jest środkiem symetrii tego równoległoboku. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D.

b) Punkty $A=(-4,-5)$, $B=(5,-1)$ i $C=(2,7)$ to wierzchołki równoległoboku $ABCD$. Znajdź współrzędne środka symetrii tego równoległoboku oraz wierzchołka D.

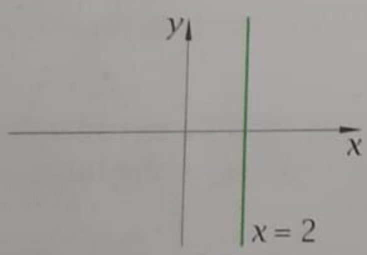
10. Obrazem punktu $A=(199,397)$ w symetrii osiowej względem prostej a jest punkt $A'=(-201,-403)$, a obrazem punktu $B=(-199,-404)$ w tej symetrii jest punkt $B'=(201,396)$. Narysuj prostą a w układzie współrzędnych.

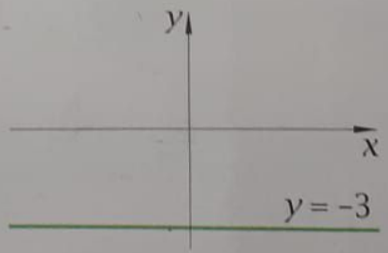
RÓWNANIE PROSTEJ

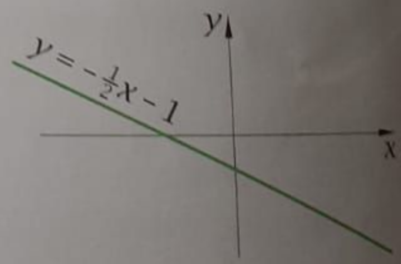
A Narysuj układ współrzędnych i zaznacz kilka punktów spełniających podany warunek. Jaką figurę tworzą wszystkie punkty spełniające ten warunek?

1. Pierwsza współrzędna jest równa 2.
2. Druga współrzędna jest równa –5.
3. Druga współrzędna jest o 2 większa od pierwszej.
4. Suma współrzędnych jest równa 0.

Każdy ze zbiorów punktów opisanych w powyższym ćwiczeniu to prosta. Warunek, który spełniają współrzędne punktów leżących na prostej, można zapisać za pomocą równania. Gdy prosta jest prostopadła do osi x, równanie ma postać $x = d$; gdy jest prostopadła do osi y, równanie ma postać $y = b$. W pozostałych przypadkach równanie możemy zapisać w postaci $y = ax + b$, gdzie $a \neq 0$.







Każde z równań podanych powyżej można przedstawić w innej postaci:

$$x = 2 \quad \Updownarrow \quad x + 0 \cdot y - 2 = 0$$

$$y = -3 \quad \Updownarrow \quad 0 \cdot x + y + 3 = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 1 \quad \Updownarrow \quad x + 2y + 2 = 0$$

Dla dowolnej prostej w układzie współrzędnych można dobrać trzy liczby A, B i C, takie że współrzędne każdego punktu tej prostej spełniają równanie $Ax + By + C = 0$, przy czym przynajmniej jedna z liczb A lub B jest różna od 0.

Jest też na odwrót. Gdy mamy dane równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie A, B i C są dowolnymi liczbami oraz A, B nie są obie równe zeru, to wszystkie punkty, których współrzędne spełniają to równanie, tworzą prostą.

Równanie $Ax + By + C = 0$ nazywamy często **ogólnym równaniem prostej**.

Zwróć uwagę na to, że równanie ogólne tej samej prostej można zapisać na różne sposoby. Na przykład tę samą prostą opisują równania:

$$x + 2y - 3 = 0 \qquad -x - 2y + 3 = 0 \qquad 2x + 4y - 6 = 0 \qquad \tfrac{1}{2}x + y - \tfrac{3}{2} = 0$$

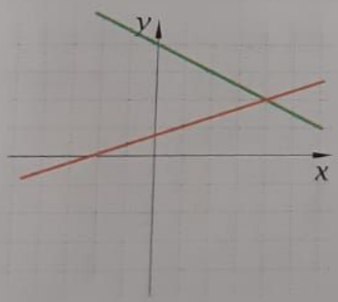
B

1. Znajdź współrzędne dwóch punktów należących do prostej $3x - 2y + 6 = 0$, a następnie narysuj tę prostą.
2. Zapisz w postaci ogólnej równanie prostej $y = 2x - \sqrt{7}$.
3. Zapisz w postaci ogólnej równania prostych prostopadłych do osi układu współrzędnych i przechodzących przez punkt $(3, -7)$.

Wiemy już, że każde równanie typu $Ax + By + C = 0$, gdzie liczby A i B nie są jednocześnie równe zeru, można zilustrować graficznie jako prostą. Układ dwóch takich równań można więc zilustrować za pomocą dwóch prostych. Możemy powiedzieć, że rozwiązywanie układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi to poszukiwanie wspólnych punktów tych prostych.

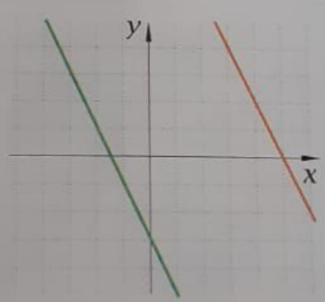
Przyjrzyj się poniższym układom równań i ich interpretacjom geometrycznym.

$$\begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$



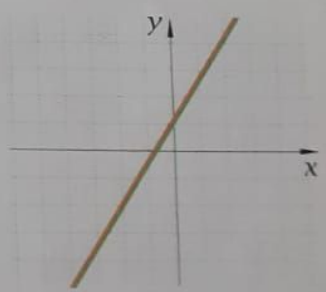
Te proste przecinają się w jednym punkcie — układ równań ma jedno rozwiązanie, jest to układ oznaczony.

$$\begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$$



Proste są równoległe, nie mają punktów wspólnych — układ równań nie ma rozwiązań, jest to układ sprzeczny.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2 = 0 \\ -1{,}5x + y - 1 = 0 \end{cases}$$



Te proste pokrywają się, mają nieskończenie wiele punktów wspólnych — układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jest to układ nieoznaczony.

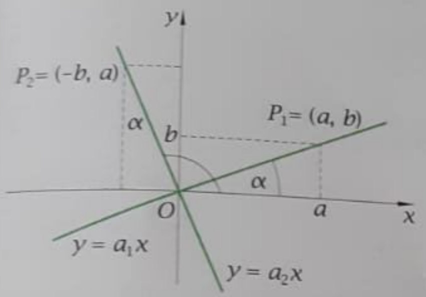
Uwaga. Rozwiązaniem nieoznaczonego układu równań jest każda para liczb spełniająca jedno z równań. Oczywiście taka para spełnia także drugie równanie.

1. Która z podanych prostych jest równoległa do prostej $y = -\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}$?

$y = \frac{2}{3}x \qquad -2x - 3y + 1 = 0 \qquad 2y + \frac{2}{3}x - 3 = 0 \qquad 4x + 6y - 5 = 0$

2. Narysuj prostą $y = 0{,}6x$. Oblicz tangens kąta nachylenia tej prostej do osi x.
3. Oblicz tangens kąta nachylenia prostej $3x - 5y + 10 = 0$ do osi x.

Na poniższym rysunku przedstawiono dwie proste prostopadłe przechodzące przez początek układu współrzędnych.



Zastanówmy się, jaka jest zależność między ich współczynnikami kierunkowymi. Wybierzmy na jednej prostej punkt $P_1 = (a, b)$, a na drugiej — taki punkt P_2, że $OP_2 = OP_1$. Wówczas zaznaczone trójkąty prostokątne są przystające. Zatem $P_2 = (-b, a)$. Współczynnik kierunkowy pierwszej z tych prostych to tangens kąta nachylenia tej prostej do osi x.

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Druga z tych prostych jest nachylona do osi x pod kątem $\alpha + 90°$. Z definicji tangensa wiemy, że tangens tego kąta (zob. rys.) jest równy $\frac{a}{-b}$. Zatem:

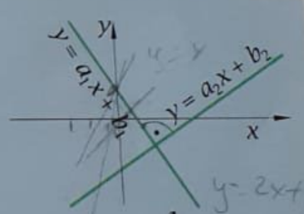
$$a_2 = \operatorname{tg}(\alpha + 90°) = \frac{a}{-b} = -\frac{1}{\frac{b}{a}} = -\frac{1}{a_1}$$

Ta zależność zachodzić będzie także wtedy, gdy proste prostopadłe nie będą przechodzić przez początek układu współrzędnych.

Podobnie można wykazać twierdzenie odwrotne: gdy jedna prosta ma współczynnik kierunkowy a_1, a druga $-\frac{1}{a_1}$, to te proste są prostopadłe.

Z powyższych rozważań wynika, że:

Prosta $y = a_1x + b_1$ jest prostopadła do prostej $y = a_2x + b_2$, wtedy i tylko wtedy gdy $a_2 = -\frac{1}{a_1}$.



$$a_2 = -\frac{1}{a_1}$$

y = 2x+1
y = 4x+1

1. Znajdź równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i prostopadłej do prostej o równaniu $3y - 7x + 5 = 0$.
2. Która z podanych prostych jest prostopadła do prostej $y = -\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}$?

$2x + 3y - 4 = 0 \qquad y = 1{,}5x \qquad -10y + 15x - 1 = 0 \qquad y = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$

Wiele problemów geometrycznych dotyczących prostych możemy rozstrzygnąć, rozwiązując odpowiednie równania lub układy równań. Na ogół wygodniej jest posługiwać się wtedy postacią kierunkową równania prostej.

$y = \frac{1}{2}x + 1 \qquad y = 8x + 1$

Wiemy już, że każdą prostą można opisać w układzie współrzędnych równaniem w postaci ogólnej $Ax + By + C = 0$. Proste, które nie są prostopadłe do osi x, można także opisać za pomocą równania postaci $y = ax + b$. Takie równanie nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

C

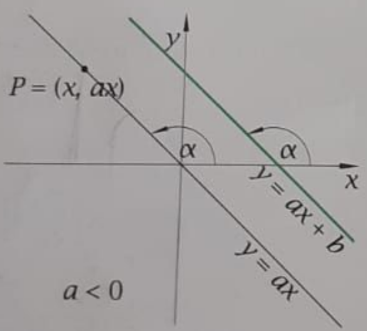
1. Zapisz podane równania prostych w postaci kierunkowej.

$2x - y + 3 = 0 \qquad x + 3y - 1 = 0 \qquad 2x + y = 0$

2. Podaj przykład takiego równania prostej w postaci ogólnej, którego nie można przekształcić do postaci kierunkowej.
3. Podaj przykład równania prostej, która przechodzi tylko przez dwie ćwiartki układu współrzędnych.
4. Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi prosta $y = ax + 1$, gdy $a > 0$, a przez które, gdy $a < 0$?

Współczynnik a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym prostej** $y = ax + b$. Nazwa ta wynika stąd, że współczynnik ten decyduje o kierunku prostej. Omówimy teraz, jaki jest związek między współczynnikiem kierunkowym prostej a kątem nachylenia tej prostej do osi x w układzie współrzędnych.

Kątem nachylenia prostej do osi x nazywamy kąt nieujemny i mniejszy od 180°, którego początkowe ramię jest równoległe do osi x, a końcowe leży na tej prostej.

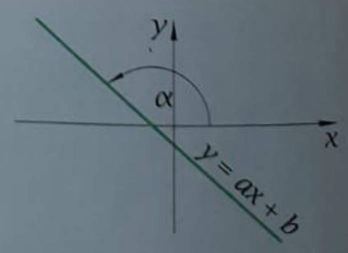


Niech α oznacza kąt nachylenia prostej $y = ax + b$ do osi x. Pamiętasz zapewne, że proste o tym samym współczynniku kierunkowym są równoległe. Zatem prosta $y = ax$ jest nachylona do osi x także pod kątem α. Dowolny punkt leżący na prostej $y = ax$ ma współrzędne $P = (x, ax)$. Z definicji tangensa wynika, że:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ax}{x} = a$$

Uzasadniliśmy w ten sposób, że:

Tangens kąta nachylenia prostej $y = ax + b$ do osi x jest równy współczynnikowi kierunkowemu a.



$a = \operatorname{tg} \alpha$

D

Podaj przykład równania prostej, która jest nachylona do osi x pod kątem:

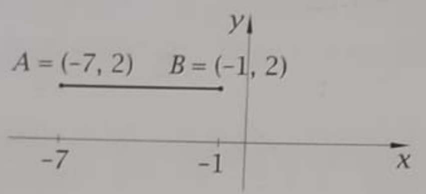
1. ostrym,
2. rozwartym.

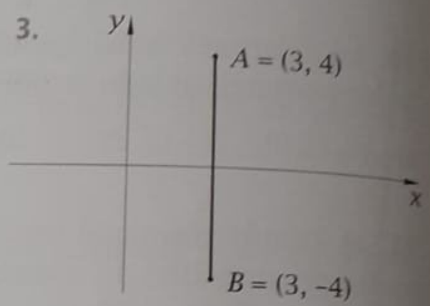
DŁUGOŚĆ ODCINKA. [redacted]

Gdy znamy położenie dwóch punktów na osi liczbowej, możemy obliczyć odległość między nimi. Podobnie jest, gdy znamy współrzędne dwóch punktów na płaszczyźnie.

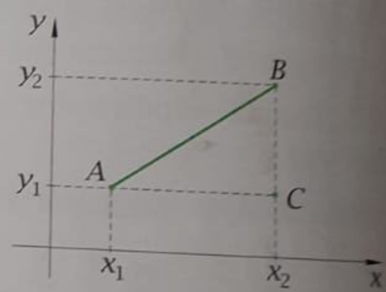
A Jaka jest długość odcinka AB?

1. 

2. 

3. 

Przyjrzyj się rysunkowi obok. Odległość między punktami A i B, czyli długość odcinka AB, możemy obliczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ACB. Jeśli $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, to $C = (x_2, y_1)$ oraz:



$$|AC| = x_2 - x_1 \qquad |BC| = y_2 - y_1$$

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że:

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Stąd:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Odległość między punktami $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$ wynosi:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$