13. Wykres pewnej funkcji liniowej przechodzi przez punkt $(2,7)$, a współczynnik kierunkowy jest ujemny. Miejsce zerowe tej funkcji:

A. jest liczbą mniejszą od -7

B. jest liczbą większą od 2

C. może być dowolną liczbą różną od 2

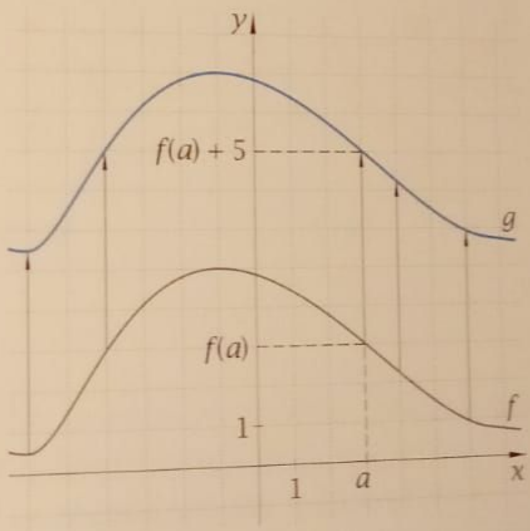
D. może być dowolną liczbą różną od 7

PRZESUWANIE WYKRESÓW FUNKCJI

A Zaznacz w układzie współrzędnych punkt $A = (2,-1)$. Podaj współrzędne punktu A', który otrzymamy w wyniku przesunięcia punktu A w opisany sposób.

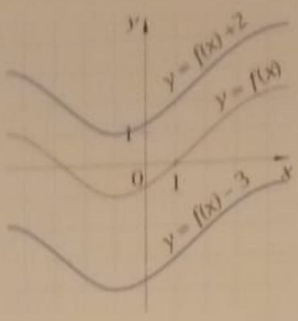
1. Przesunięcie o 2 jednostki w górę.
2. Przesunięcie o 1 jednostkę w dół.
3. Przesunięcie o 3 jednostki w prawo.
4. Przesunięcie o 5 jednostek w lewo.

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji f i g. Wykres funkcji g (narysowany niebieskim kolorem) powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o 5 jednostek w górę.



Zauważ, że wartość funkcji g dla argumentu x jest o 5 większa od wartości funkcji f dla tego argumentu. Można więc powiedzieć, że dla każdego argumentu x funkcja g przyjmuje wartość równą $f(x) + 5$. Zatem:

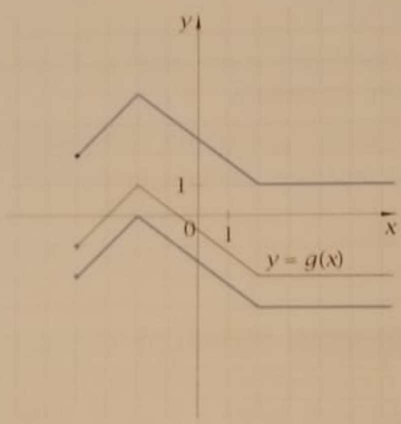
$$g(x) = f(x) + 5$$

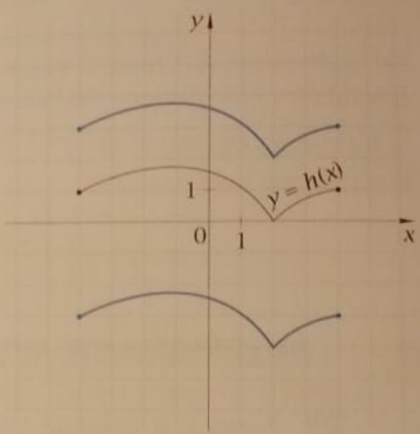


Wykresy na rysunku obok mają taki sam kształt. Każdy z wykresów zaznaczonych kolorem niebieskim powstał przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ (w górę lub w dół).

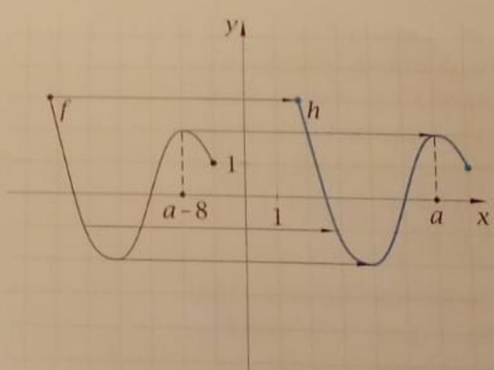
Wzory otrzymanych funkcji zmieniają się w zależności od tego, o ile jednostek i w którą stronę przesuwano wykres.

Korzystając ze wzoru, który opisuje wykres czarny, opisz wykresy zaznaczone kolorem niebieskim.





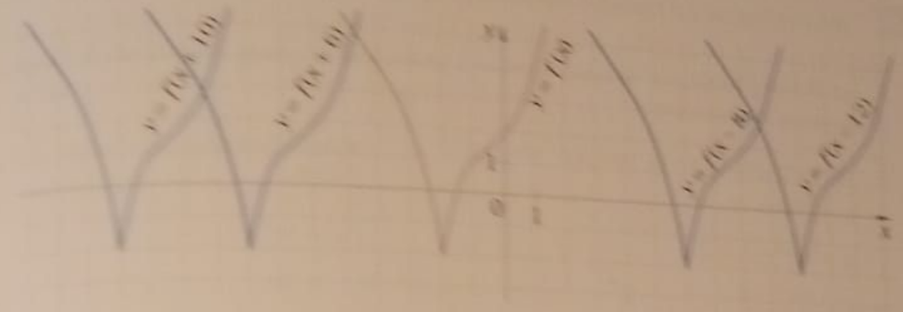
Na kolejnym rysunku przedstawiono wykresy funkcji f i h. Wykres funkcji h powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o 8 jednostek w prawo.



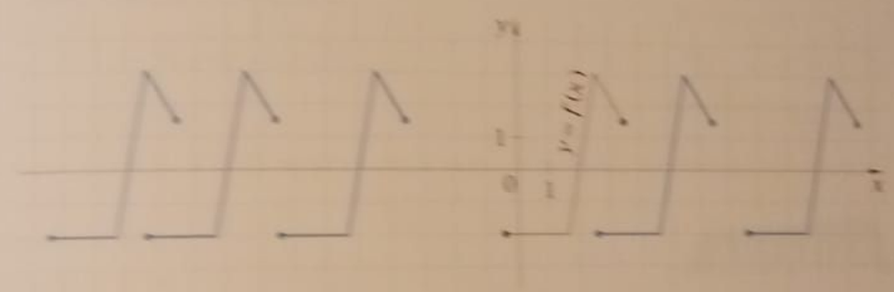
Zauważ, że wartość funkcji h dla argumentu x jest taka sama jak wartość funkcji f dla argumentu $x - 8$. Możemy więc powiedzieć, że dla każdego argumentu x funkcja h przyjmuje wartość równą $f(x - 8)$. Zatem:

$$h(x) = f(x - 8)$$

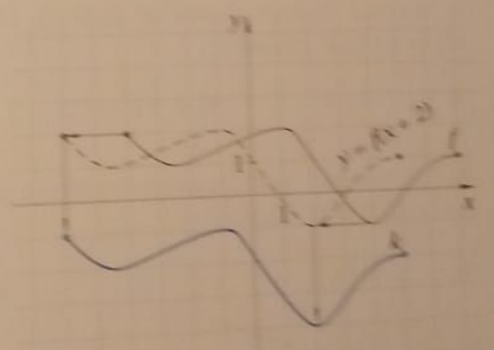
wykresy na poniższym rysunku mają jednakowe kształty. Każdy z wykresów zaznaczonych niebieskim kolorem powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = f(x)$ w lewo lub w prawo. *Zwróć uwagę*, w jaki sposób zostały opisane funkcje, które powstały.



Korzystając ze wzoru, który opisuje czarny wykres, opisz wykresy pozostałych funkcji. Każdy z narysowanych wykresów powstał przez przesunięcie wykresu funkcji f.



Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji f i k. Wykres funkcji k powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o 2 jednostki w lewo i o 3 jednostki w dół.



Dla każdego argumentu x wartość funkcji k wynosi $f(x+2)-3$. Zatem:

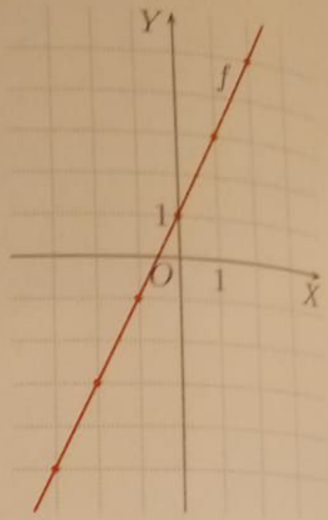
$$k(x) = f(x+2) - 3$$

1. Wykres funkcji g powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o 3 jednostki w prawo i o 2 jednostki w dół. Która równość opisuje funkcję g?

$y = f(x+3) - 2$ $\quad$ $y = f(x-3) - 2$ $\quad$ $y = f(x-3) + 2$ $\quad$ $y = f(x+3) + 2$

2. Wartość funkcji h dla argumentu x wynosi $h(x) = f(x+10) + 4$. Jak należałoby przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać wykres funkcji h?

5.1. Wykres funkcji liniowej (1)



Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji określonej za pomocą wzoru $f(x) = 2x + 1$, jeśli jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = 2x + 1$, sporządzamy tabelę wartości funkcji dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3	5

Otrzymane punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych. Zwróć uwagę, że wszystkie te punkty leżą na jednej prostej – jest ona wykresem funkcji f.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

a) $f(x) = x + 2$ b) $f(x) = 2x - 1$ c) $f(x) = -x$ d) $f(x) = -x + 3$

Definicja

Funkcję określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie a i b są stałymi, nazywamy **funkcją liniową**.

Wykresem funkcji $f(x) = ax + b$ (używamy też zapisu $y = ax + b$) jest **prosta**. Aby naszkicować wykres tej funkcji, wystarczy znaleźć dwa należące do niego punkty i poprowadzić przez nie prostą (przez dwa różne punkty przechodzi tylko jedna prosta). Prosta ta ma równanie $y = ax + b$.

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{5}{3}x - 1$.

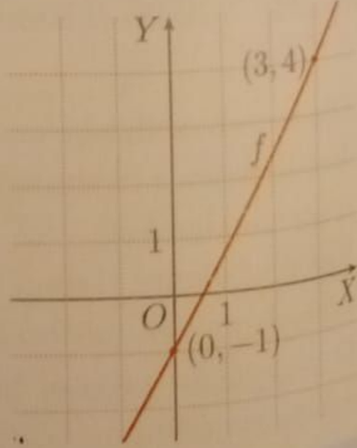
Dla $x = 0$ mamy $f(0) = \frac{5}{3} \cdot 0 - 1 = -1$.

Dla $x = 3$ mamy $f(3) = \frac{5}{3} \cdot 3 - 1 = 4$.

Otrzymane wyniki można przedstawić w tabeli.

x	0	3
$f(x)$	-1	4

Punkty $(0, -1)$ i $(3, 4)$ należą do wykresu funkcji f.



Ćwiczenie 2
Znajdź dwa punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f. Naszkicuj ten wykres.

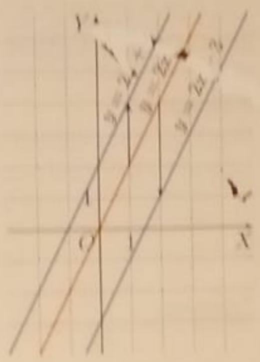
a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$ b) $f(x) = -\frac{3}{5}x$ c) $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ d) $f(x) = -\frac{4}{7}x - 1$

Definicja

Liczbę a występującą we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej.

Przykład 3

Wykresy funkcji liniowych $y = 2x + 2$ i $y = 2x - 3$ są prostymi równoległymi. Każdy z nich możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = 2x$ wzdłuż osi OY.



Po przesunięciu prostej $y = 2x$ o 2 jednostki w górę otrzymamy prostą $y = 2x + 2$.

Po przesunięciu prostej $y = 2x$ o 3 jednostki w dół otrzymamy prostą $y = 2x - 3$.

Ćwiczenie 3
Naszkicuj wykres funkcji $y = 3x$, a następnie wykres funkcji f.

a) $f(x) = 3x + 1$ b) $f(x) = 3x + 3$ c) $f(x) = 3x - 2$ d) $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$

Twierdzenie

Wykresy funkcji liniowych o tym samym współczynniku kierunkowym są prostymi równoległymi.

Podane powyżej twierdzenie można też sformułować następująco:

Proste dane równaniami $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$.

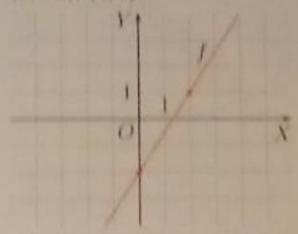
Ćwiczenie 4
Które spośród prostych $l_1, l_2, \ldots, l_8$ są równoległe?

$l_1: y = \frac{1}{2}x - 3$ $l_3: y = -\frac{1}{2}x + 3$ $l_5: y = 8 - \frac{1}{2}x$ $l_7: y = 1 - 2x$

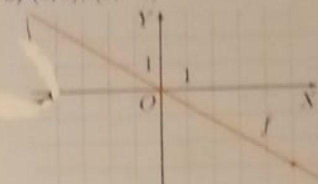
$l_2: y = 2x - 3$ $l_4: y = 4 + 2x$ $l_6: y = 2x - \sqrt{3}$ $l_8: y = \sqrt{5} - \frac{1}{2}x$

Ćwiczenie 2

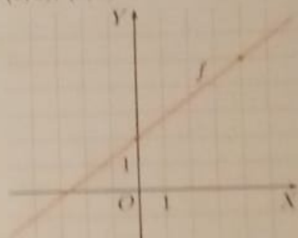
a) (0, −2), (2, 1)



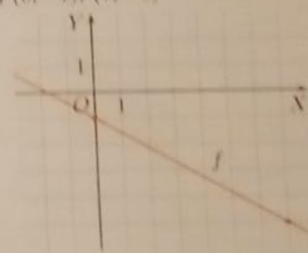
b) (0, 0), (5, −3)



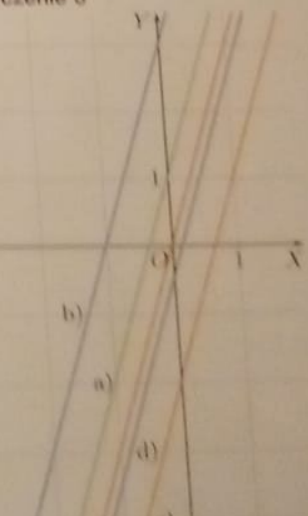
c) (0, 2), (4, 5)



d) (0, −1), (7, −5)



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4
$l_2 \parallel l_4 \parallel l_6$, $l_3 \parallel l_5 \parallel l_8$

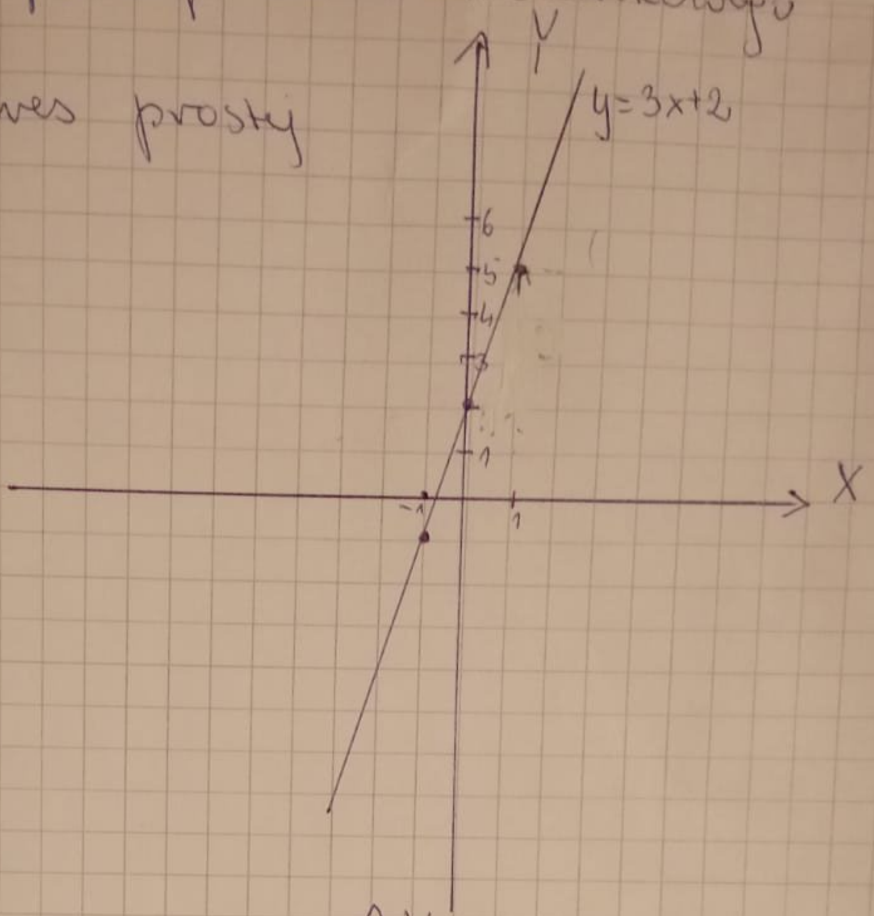
$y = 3x + 2$ – wykres prostej

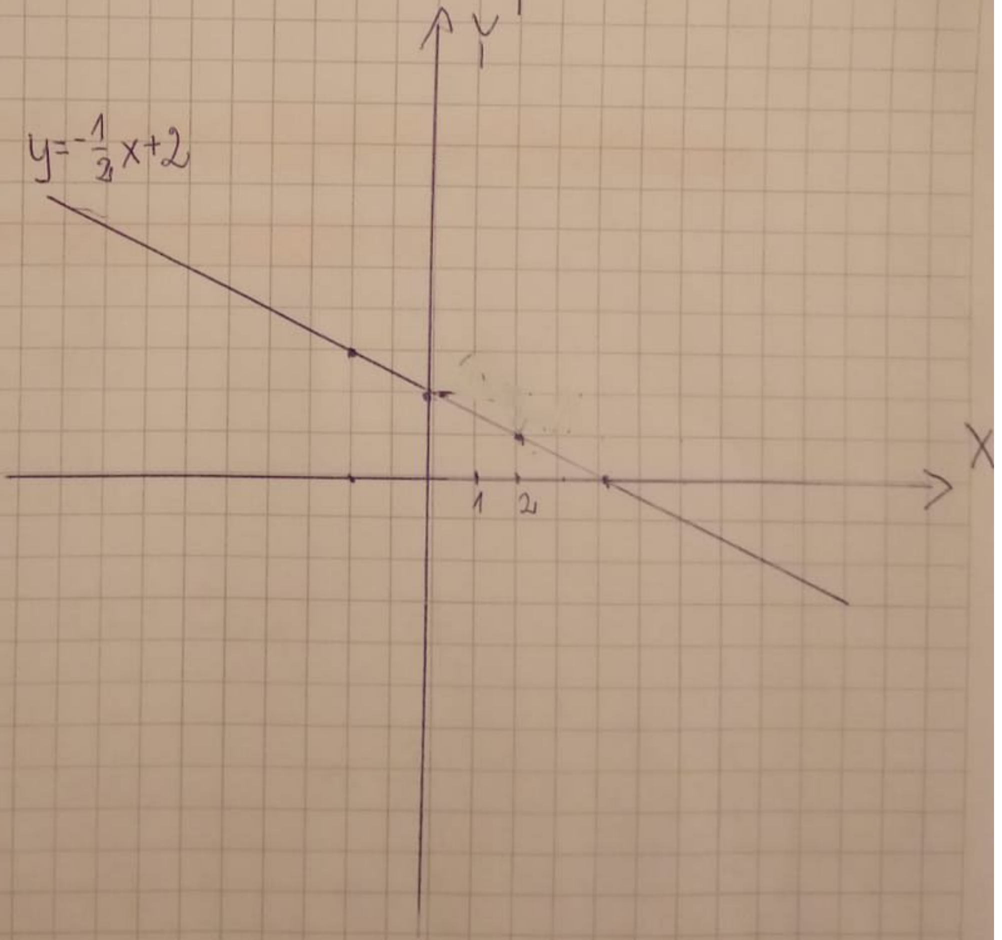
x	-1	0	1
y	-1	2	5

$y = 3\cdot(-1) + 2 = -1$

$y = 3\cdot 0 + 2 = 2$

$y = 3\cdot 1 + 2 = 5$





$y = -\frac{1}{2}x + 2$

x	-2	0	2
y	3	2	1

$y = -\frac{1}{2}\cdot(-2) + 2 = 3$

$y = -\frac{1}{2}\cdot 0 + 2 = 2$

$y = -\frac{1}{2}\cdot 2 + 2 = 1$